

Streszczenie rozprawy doktorskiej:

---

ANALIZA CHARAKTERYSTYK NIESPÓJNOŚCI  
MACIERZY PORÓWNAŃ PARAMI I ICH ZWIĄZKÓW  
Z JAKOŚCIĄ ESTYMACJI WEKTORA PRIORYTETÓW

---

Tomasz Starczewski

5 listopada 2021

Prezentowana rozprawa doktorska dotyczy jednej z najszerzej stosowanych technik wspomaganie decyzji wielokryterialnych, zwanej *Hierarchiczną Analizą Problemu* - AHP (ang. *Analytic Hierarchy Process*). W swoich badaniach skupiam się na analizie zależności pomiędzy indeksami niespójności stosowanymi w AHP, a jakością otrzymywanych oszacowań priorytetów. W tym celu przeprowadzam szereg symulacji komputerowych, modelujących interesujące mnie zależności w rozmaitych sytuacjach decyzyjnych. Moim celem jest poznanie rzeczywistych zależności pomiędzy wartością indeksów niespójności, a błędami w wektorze priorytetów i budowa w oparciu o te zależności modeli pozwalających określać przydatność macierzy porównań parami do uzyskania prawidłowych oszacowań użyteczności poszczególnych alternatyw decyzyjnych.

W pierwszym rozdziale pracy prezentuję ogólny zarys szeroko pojętej teorii decyzji i technik wspomaganie decyzji. W szczególności skupiam się na technikach wielokryterialnych, do których należy metoda AHP. Techniki wspomaganie decyzji są stosowane w praktyce w sytuacjach, gdy podejmowane decyzje są dużej wagi, wiążą się ze znacznymi korzyściami, bądź stratami finansowymi czy społecznymi lub dotyczą większej grupy osób. Czynią one bardziej obiektywnymi procesy podejmowania decyzji i częściowo uniezależniają proces podejmowania decyzji od subiektywnych ocen pojedynczych decydentów. W literaturze opisanych jest sporo technik tego typu. Szczególną grupą stanowią techniki wspomaganie decyzji wielokryterialnych. W przypadku gdy oceniamy użyteczność alternatyw pod względem kilku kryteriów często mamy do czynienia z sytuacją, w której nie istnieje alternatywa najlepsza ze względu na wszystkie kryteria jednocześnie. W takich sytuacjach przeprowadza się analizę ważności samych kryteriów, aby ostatecznie ustalić użyteczność poszczególnych alternatyw. W swojej pracy wyliczam kilka takich technik, jednak w szczególności zajmuję się wspomnianą procedurą AHP, która wykorzystuje technikę porównywania ze sobą parami alternatyw i kryteriów. Metoda porównywania parami znana była już wcześniej, jednak zo-

stała połączona przez T. L. Saaty'ego z metodą hierarchizacji kryteriów wyboru, dając podstawy współczesnej metodologii AHP.

W drugim rozdziale rozprawy opisuję w skrócie istotę i znaczenie stosowania symulacji komputerowych w badaniach naukowych. Moja praca w głównej mierze oparta jest na wynikach eksperymentów realizowanych przy pomocy komputera. Jest to szczególny rodzaj eksperymentu naukowego, w którym bada się zależności pomiędzy danymi wejściowymi i wyjściowymi, przy zastosowaniu różnych algorytmów obliczeniowych. Symulacje tego typu w literaturze obcojęzycznej znane są pod nazwą modeli typu *black box*. W symulacjach tych przekształca się obserwowalne dane wejściowe w obserwowalne dane wyjściowe, podczas gdy wartości rozmaitych zmiennych wewnętrznych, jak i poszczególne etapy przekształcające te dane są realizowane przez program komputerowy i są one nieobserwowalne. W moich modelach danymi wejściowymi są rzeczywiste wartości priorytetów przypisane poszczególnym alternatywom oraz zakłócenia pojawiające się w macierzach porównań parami. W rzeczywistości na wejście podawane są sposoby generowania tych wartości, natomiast sam proces ich losowania wykonywany jest przez komputer w oparciu o generatory liczb *pseudolosowych*. Taki eksperyment, to z kolei przykład symulacji typu *Monte Carlo*, dzięki której można badać złożone zależności w uproszczony sposób. Symulacje tego typu wykonuje się na skończonym zbiorze danych losowanych z odpowiedniego rozkładu, uzyskując przybliżony obraz rzeczywistego procesu.

Trzeci rozdział niniejszej rozprawy poświęcony jest opisowi procedury AHP. Definiuję w nim podstawowe pojęcia takie jak: *wektor priorytetów*, *macierz porównań parami*, *spójność macierzy* czy *skala priorytetów*. Podaję opisane w literaturze alternatywne propozycje skal priorytetów oraz sposobów wyznaczania wektora priorytetów, zwanych *metodami priorytetyzacji*. Prezentuję zastosowany przeze mnie algorytm użyty w celu porównania działania dwóch metod priorytetyzacji oraz trzech skal priorytetów. W przeprowadzanych symulacjach za miarę jakości wektora priorytetów otrzymywanego w wyniku procedury AHP przyjąłem kilka rodzajów błędów. W szczególności prezentuję wartości średnie, odchylenia standardowe oraz wartości graniczne (min i max) błędów absolutnych - AE i względnych - RE, występujące w oszacowaniach wektorach priorytetów. W tabelach umieszczonych w rozdziale trzecim prezentuję również wartości współczynnika korelacji błędów w macierzach porównań parami z błędami w wektorach priorytetów. Wprowadzam również definicje innych rodzajów błędów wskazujące na błędną kolejność priorytetów w uzyskiwanych wektorach, oznaczone skrótami OE (ang. *Ordering Errors*) i SWFR (ang. *Significantly Wrong Final Ranking*). Badanie błędów tego typu jest szczególnie istotne ze względu na częste wykorzystywanie procedury AHP jako narzędzia wyboru *najlepszej* alternatywy. Biorąc pod uwagę dość szeroką dyskusję toczącą się w literaturze oraz zaprezentowane w rozdziale trzecim wyniki symulacji, do uzyskania wyników zaprezentowanych w kolejnych rozdziałach używam jedynie metody średniej geometrycznej.

W końcowym podrozdziale rozdziału trzeciego zwracam również uwagę na ważny aspekt związany z interpretacją otrzymywanych wyników. Prezentuję tam przykład macierzy, w której zwiększenie błędów prowadzi do poprawy oszacowania wektora priorytetów. Ten przykład ma na celu uświadomienie, że prezento-

wane wyniki muszą być interpretowane w ujęciu probabilistycznym. Pokazywane zależności pomiędzy badanymi zmiennymi są to zależności, które występują z pewnym prawdopodobieństwem. Na podstawie przeprowadzanych symulacji możemy jedynie obserwować realizację rozkładu prawdopodobieństwa je opisującego. Niemniej występowanie losowych błędów w badanym zjawisku prowadzi czasem do sytuacji, w której zależność okazuje się przeczyć trendowi, którego się spodziewamy. Badania symulacyjne z mojej pracy, zgodnie z zasadami przeprowadzania symulacji Monte Carlo, zostały jednak przeprowadzone na dużych próbach losowych. Dzięki temu możemy obserwować reguły, które charakteryzują rozkłady badanych wartości.

Rozdziały czwarty i piąty poświęcone są analizie niespójności macierzy porównań parami. Analiza niespójności macierzy jest nieodłącznym elementem procedury AHP. Wartości priorytetów przypisane poszczególnym alternatywom obliczane są na podstawie macierzy porównań parami dostarczonej przez decydenta. Macierz ta zazwyczaj zawiera w sobie opinie obarczone pewnymi błędami. Choć sposób nadawania wartości poszczególnym alternatywom poprzez porównywanie każdych dwóch względem siebie ma na celu ułatwienie uzyskania poprawnych wyników, to jednak zazwyczaj oceny te nie są w pełni spójne. Niespójności te mogą być wynikiem niespójności w posiadanej wiedzy oraz umiejętności jej wyrażania przez decydentów, ale również mogą wynikać z ograniczoności samej procedury. Jednym z takich ograniczeń jest ograniczona ilość porównań słownych lub liczbowych. Nadmiarowość danych, które uzyskujemy, porównując każdą parę alternatyw ze sobą pozwala nam wykryć te niespójności. Niespójności te są traktowane z reguły jako niepożądany efekt, obniżający jakość uzyskanego wektora priorytetów. Chociaż, podobnie jak w przypadku prezentowanym w rozdziale trzecim, zasada ta może mieć swoje wyjątki, to jednak domniemywamy, że z reguły przyrost niespójności macierzy będzie pociągał za sobą przyrost błędów w oszacowaniu priorytetów. Taki rodzaj zależności jest często w literaturze przyjmowany *ad hoc*. Autorzy alternatywnych indeksów niespójności wskazują jednak, że reguła ta nie jest oczywista. Zależność pomiędzy spójnością macierzy, a błędami w wektorze będzie bowiem zależeć nie tylko od rozpatrywanych zakłóceń macierzy, ale również od stosowanych wskaźników niespójności. Stąd czwarty rozdział mojej pracy rozpocynam od przeglądu tych właśnie wskaźników.

W pierwszym podrozdziale rozdziału czwartego prezentuję definicje kilku znanych z literatury indeksów niespójności. Jest wśród nich *indeks Saaty'ego* wprowadzony przez ojca procedury AHP, jak również niemniej popularny *indeks geometryczny*. Oba te indeksy są związane z odpowiednimi procedurami priorytetyzacji, niemniej w literaturze jest sporo definicji, które nie są związane z żadną procedurą otrzymywania wektora priorytetów. Jedną z nich jest definicja podana przez W. W. Koczkodaję. Przewagą *indeksu Koczkodaję* nad dwoma wcześniej wspomnianymi jest nie tylko niezależność od procedury priorytetyzacji, ale również jego związek z największą niespójnością występującą w macierzy. Stąd, stosując ten indeks możemy jednocześnie odszukać konkretne odstępstwa od niespójności występujące w macierzy porównań parami. Niespójności te są związane z trzema elementami macierzy występującymi w definicji spójności macierzy, które zostały nazwane *triadą*. To co jest zaletą indeksu Koczkodaję jest po części jednak również jego wadą. Ponieważ wartość tego indeksu jest obliczana na podstawie triady

o największej niespójności, nie bierze on pod uwagę niespójności innych występujących w macierzy triad. Stąd w literaturze pojawiły się inne indeksy, oparte na podobnym pomysle co indeks Koczkodaja, ale próbujące wyeliminować jego wady. Przykłady takich definicji, które zostały wcześniej przedstawione w literaturze, prezentuję również w podrozdziale 4.1. W kolejnym podrozdziale zwracam jednak uwagę na możliwość zdefiniowania całej klasy indeksów niespójności w oparciu o pomysł badania niespójności triad, czyli w gruncie rzeczy możliwość zdefiniowania nieskończonej ilości indeksów niespójności. Dla porównania podaję kilka nowych definicji indeksów opartych na pomysle triady.

Kolejne podrozdziały rozdziału czwartego poświęcone są symulacjom związanym z przedstawionymi indeksami niespójności. W celu zbadania poprawności działania poszczególnych indeksów niespójności wyznaczam współczynniki korelacji pomiędzy indeksami niespójności i błędami w wektorach priorytetów. W tabelach rozdziału czwartego umieszczam zarówno wartości współczynników korelacji Spearmana, jaki i Pearsona. Dla zbadania poprawności działania indeksów najważniejszy jest współczynnik korelacji Spearmana, ponieważ weryfikuje on monotoniczność badanej zależności. Indeks niespójności spełni swoje zadanie, jeżeli jego wartość będzie rosła wraz ze wzrostem wartości błędów popełnianych przez decydenta, wskazując czy dana przez niego macierz nadaje się do oszacowania wektora priorytetów. Stąd w prezentowanych tabelach zgromadzone zostały współczynniki korelacji Spearmana pomiędzy indeksami niespójności, a błędami w wektorach priorytetów. Obok nich są jednak prezentowane tabele z wartościami współczynników Pearsona wskazujące na liniowość badanej zależności. Chociaż zależność pomiędzy indeksami niespójności i błędami w wektorach priorytetów nie musi być liniowa, żeby można było uznać dany indeks za działający poprawnie, to jednak indeksy posiadające taką własność są wygodne w użyciu. Jeśli bowiem wartość błędów w wektorze priorytetów rośnie liniowo wraz ze wzrostem wartości indeksu niespójności, to bardziej intuicyjne staje się oszacowanie tych błędów na podstawie indeksu. Jak można zaobserwować na podstawie uzyskanych wartości współczynnika korelacji Pearsona, część prezentowanych indeksów wykazała niemal idealnie liniową zależność z błędami w wektorze priorytetów.

W początkowych tabelach rozdziału czwartego przedstawiam wartości współczynników korelacji wyznaczone na podstawie wektorów i indeksów uzyskanych z pojedynczych macierzy niespójności. Niemniej w problemach rozwiązywanych metodą AHP rozważa się szereg macierzy porównań parami. Dlatego w kolejnych tabelach zaprezentowałem wartość współczynników korelacji pomiędzy średnią wartością indeksów z całej procedury AHP, a błędami występującymi w końcowym wektorze priorytetów. Zgromadzone wyniki pokazały jeszcze silniejszą korelację w przypadku zbadania całej procedury AHP. Wspomniane współczynniki korelacji zostały obliczone również dla różnych typów błędów w wektorze priorytetów. W podrozdziale 4.3 zaprezentowałem korelację z błędami bezwzględnymi AE i względnymi RE, które są wrażliwe na wszystkie odstępstwa od prawidłowej wartości wektora priorytetów. Z kolei zaprezentowane w podrozdziale 4.4 tabele zawierają korelację z błędami SWFR, biorącymi pod uwagę jedynie zmianę kolejności w rankingu dwóch najlepszych alternatyw. Chociaż wartości współczynników korelacji w tabelach z rozdziału 4.4 okazały się być nieco niższe, to jednak niewątpliwie wskazywały dobre własności przebadanych indeksów.

W podrozdziale 4.5 z kolei przedstawiłem wyniki analogicznych symulacji z zastosowaniem różnych skal priorytetów. W symulacjach, których wyniki prezentowane były w podrozdziałach 4.3 i 4.4 macierze porównań parami zaokrąglano zawsze do skali Saaty'ego. Choć skala ta jest z reguły stosowana w procedurze AHP, to jednak nie jest ona jedyną skalą, którą można użyć w celu ilościowego wyrażenia opinii decydenta. Wyniki zaprezentowane w podrozdziale 4.5 dotyczyły symulacji z zastosowaniem skali rozszerzonej Saaty'ego z dwukrotnie większą ilością możliwych porównań oraz skali geometrycznej o podstawie  $\sqrt{2}$ . Obliczono także wartości współczynników korelacji indeksów z błędami na podstawie macierzy niezaokrąglonych do żadnej skali. Zaprezentowane wyniki pokazały w większości przypadków wysoką zależność pomiędzy badanymi wielkościami. Zmiana skali w większości wypadków nie odegrała jednak znaczącej roli. Okazało się, że z jednej strony w części przypadków wartość korelacji wzrosła przy zastosowaniu innych skal, jednak nie brakowało również przypadków, kiedy wartość korelacji okazała się lepsza dla skali używanej standardowo. Największym zaskoczeniem mogą być wyniki prezentujące wartości współczynników korelacji w przypadku macierzy niezaokrąglonych do żadnej skali, gdyż okazało się, że wartości te z reguły były niższe.

W rozdziale piątym swoją uwagę kieruję w stronę znaczenia uzyskanych wyników dla procedury akceptacji macierzy porównań parami. Wysoka korelacja pomiędzy błędami w oszacowaniach wag priorytetów, a indeksami niespójności jest miarą poprawnego działania indeksów niespójności. Prezentowane w rozdziale czwartym wyniki wykazały poprawne zachowanie większości badanych indeksów, zatem można stwierdzić, że nadają się one do określania przydatności macierzy porównań parami w procesie AHP. Powstaje jednak pytanie, kiedy należy na podstawie obliczonej wartości indeksu niespójności daną macierz zaakceptować, a kiedy odrzucić? W rozdziale piątym wskazuję na pewne braki w teoretycznych przesłankach określających próg akceptowalności macierzy podany przez Thomasa Saaty'ego. Jednocześnie proponuję alternatywną procedurę akceptacji macierzy porównań parami opartą o modele regresji związane z indeksami niespójności.

W rozdziale piątym zbudowałem modele regresji oparte o indeksy, dla których współczynniki korelacji w tabelach z rozdziału czwartego (również korelacji liniowej Pearsona) przyjmowały wartości sporo powyżej 0.9. Dla indeksów tych model liniowy w większości badanych sytuacji dobrze odwzorowuje zależność pomiędzy nimi, a błędami w wektorze priorytetów. W celu zobrazowania tych zależności w podrozdziale 5.2 narysowałem wykresy punktowe tej zależności na podstawie wyników pochodzących z symulacji procesu AHP, które w licznych przypadkach dają się dobrze przybliżać wykresami funkcji liniowych. Do zbudowania modeli regresji liniowej wybrałem cztery spośród przebadanych wcześniej indeksów: indeks Saaty'ego, indeks Koczkodaja oraz dwa inne indeksy oparte na pomysle triady: ATI (opracowany przez A. Z. Grzybowskiego) oraz MLTI (wprowadzony przez P. T. Kazibudzkiego). W podrozdziale 5.3 wyznaczyłem współczynniki regresji liniowej dla tych indeksów oraz naszkicowałem wykresy pokazujące zbieżność wyników z symulacji z wyznaczoną prostą regresji. Na podstawie tych wykresów można zaobserwować wysoką zbieżność uzyskanych wyników, szczególnie w przypadku indeksu ATI i dwóch pozostałych opartych na pomysle triad. Zbieżność tę można również wyczytać, patrząc na wartości *błędu standardowego*

modelu - MSE (ang. *Model Standard Error*) oraz współczynnika determinacji -  $R^2$  umieszczonych w przedstawionych w tabelach.

Liniowa zależność pomiędzy wartością indeksów niespójności, a błędami w oszacowaniach priorytetów daje podstawy do zaproponowanej, nowatorskiej metody akceptacji macierzy porównań parami. Znając wielkość otrzymanych na podstawie symulacji błędów dla konkretnej wartości indeksu, możemy oszacować błędy, z którymi mamy do czynienia w rzeczywistych procedurach AHP. W praktyce bowiem nie są znane błędy w macierzach porównań parami. Tym bardziej nie są też znane wielkości błędów w wektorach priorytetów uzyskane na podstawie tych macierzy. Niemniej wyznaczając wartość indeksu niespójności oraz dysponując funkcją, która przypisuje tym wartościom wielkość błędów w wektorze, decydent może wyznaczyć oszacowanie nieznanych błędów. Zaprezentowane modele regresji pozwalają decydentowi zorientować się, czy podane przez niego macierze nadają się do wyznaczenia przybliżonych wartości jego priorytetów. Jest to inne podejście niż to zaproponowane przez Saaty'ego, gdzie z góry narzucano decydentowi akceptację lub odrzucenie macierzy. Tym razem decydent informowany jest o przybliżonej wielkości błędu, który pojawia się z reguły w końcowym wektorze priorytetów. Oczywiście zawsze może się zdarzyć, że wielkość błędu określona przez modele regresji jest niedoszacowana lub przeszacowana. Dlatego rozsądnym wydaje się być pozostawienie ostatecznej decyzji o akceptacji lub odrzuceniu/poprawie macierzy samemu decydentowi, który może wziąć na siebie ryzyko związane z błędną decyzją. Ryzyko to zawsze wystąpi, nawet jeśli ustalony zostałby próg akceptacji, gdyż podobnie jak w przypadku testowania hipotez w statystyce, tak i tutaj mamy do czynienia z szacowaniem błędów na podstawie danych dotyczących ich rozkładów prawdopodobieństwa.

W rozdziale piątym przedstawiono modele zależności pomiędzy wartością wspomnianych czterech indeksów, a błędami bezwzględными AE (ang. *absolute errors*) oraz błędami typu SWFR. Zbudowano modele dla zależności zachodzących pomiędzy uśrednionymi wartościami indeksów z całej procedury AHP, a błędami w końcowym wektorze priorytetów. Przedstawiono modele dla różnej liczby kryteriów  $k = 1, 2, \dots, 7$  oraz alternatyw  $n = 1, 2, \dots, 9$ . W poszczególnych tabelach umieszczono współczynniki regresji liniowej, które mogą posłużyć do przeprowadzenia procedury akceptacji macierzy dla danej ilości kryteriów oraz alternatyw. Modele zależności z błędem typu AE wskazane jest stosować w rozwiązywaniu problemów, w których ważne są wagi priorytetów przypisywane wszystkim alternatywom, natomiast modele z błędami SWFR będą bardziej przydatne w problemach wyboru jednej spośród wszystkich alternatywy.

Ponieważ we wszystkich prezentowanych w rozdziale czwartym i piątym tabelach widzimy istotny wpływ ilości kryteriów i alternatyw na wartości współczynników korelacji, stąd w rozdziale piątym przedstawiłem również modele regresji w oparciu o dwie lub trzy zmienne. W modelach tych zmienną objaśniającą obok wartości indeksu niespójności jest liczba kryteriów i/lub alternatyw. Patrząc na współczynniki dopasowania tych modeli do rzeczywistych danych widać, że prawidłowo opisują one badaną zależność. Dla większości przypadków otrzymaliśmy nawet lepsze dopasowanie do wyników z próby w porównaniu z wcześniejszymi modelami. Za zastosowaniem modeli zależności z uwzględnioną liczbą kry-

teriów i/lub alternatyw może również przemawiać ich uniwersalność. Niemniej należy zwrócić uwagę na to, że w praktyce do przedstawionych modeli możemy podstawiać tylko wartość całkowitą liczby kryteriów i alternatyw. Przedstawione współczynniki dopasowania modelu zostały natomiast obliczone dla danych pogrupowanych i uśrednionych, gdzie liczba kryteriów i alternatyw mogła być niecałkowita. Stąd dopasowanie tych modeli w praktyce może okazać się nieco słabsze. Niemniej wszystkie prezentowane modele nadają się w mojej opinii do wykorzystania w procedurze akceptacji macierzy porównań parami.

W apendyksie swojej pracy umieściłem wykresy i tabele sporządzone dla czterech kolejnych indeksów niespójności: *indeksu geometrycznego*, *indeksu Salo-Hämäläinen* oraz dwóch indeksów opartych o badanie niespójności triad. Podobnie jak w przypadku indeksów, których wyniki umieszczono w głównej części pracy, wyniki umieszczone w apendyksie prezentują parametry modeli regresji wraz z miarami dopasowania do rzeczywistych danych. Wyniki pokazały, że istnieje spora grupa indeksów dobrze spełniających swoją rolę, czyli prawidłowo skorelowanych z różnymi rodzajami błędów występującymi w wektorach priorytetów. Na podstawie modeli regresji zbudowanych w oparciu o te indeksy można przeprowadzić dość dokładną analizę jakości wektora priorytetów i ewentualnie zdecydować o odrzuceniu/poprawianiu lub zaakceptowaniu macierzy porównań parami, a tym samym wyniku końcowego procedury AHP.